ALBEIRO ENRIQUE VERGARA URANGO

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Unidad 2
función Real de Variable Real

1.1 Definición de una función de variable real
1.1.1 Dominio
1.1.2 Rango
1.2 Representación grafica de funciones
1.2.1 Grafica de una función
1.2.2 Criterio de la recta vertical
1.3 Tipos de funciones
1.3.1 Función Inyectiva
1.3.2 Función Sobreyectiva
1.3.3 Función Biyectiva
1.3.4 Función Creciente
1.3.5 Función Decreciente
1.3.6 Función Pares o Impares
1.3.7 Funciones periódicas
1.3.8 Funciones Acotadas
1.4 Asíntotas de las graficas de una función de variable real
1.4.1 Asíntotas Horizontales
1.4.2 Asíntotas Verticales
1.5 Funciones definidas por tramos
1.6 Técnicas de Graficación
1.6.1 Desplazamientos
1.6.2 Reflexiones
1.6.3 Comprensión o alargamiento
1.6.4 Valores absolutos

1.1Función de Variable Real

Sean x, y 2 conjuntos no vacios subconjuntos de los números reales , una función de variable de variable real de x en y , es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x un único elemento de y. Esto se representa simbólicamente en:

$$f: x \rightarrow y$$

$$f = R \rightarrow R$$

$$X \rightarrow f(x) = y$$

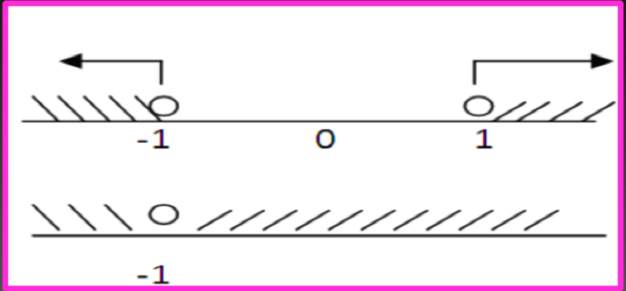
1.1.1Obtención del Dominio de una Función

$$f(x) = \boxed{\frac{2x-1}{\sqrt{|x|-1}} + \frac{1}{x+1}}$$

$(|x|-1>0) \wedge (x+1=0)$

$|x| \geq 1$

$(x \geq 1 \vee x \leq -1) \wedge (x \neq -1)$



dom $f(x) = x \in (-\infty,-1) \vee (1, \infty+)$

1.1.2 Obtención del Rango

$x \to y$

$x \to f(x) = y$

$$f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$y = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$2xy + y = x + 3$$

$$X(2y-1) = 3 - y$$

$$X = \frac{3-y}{2y-1}$$

$$2y - 1 = 0$$

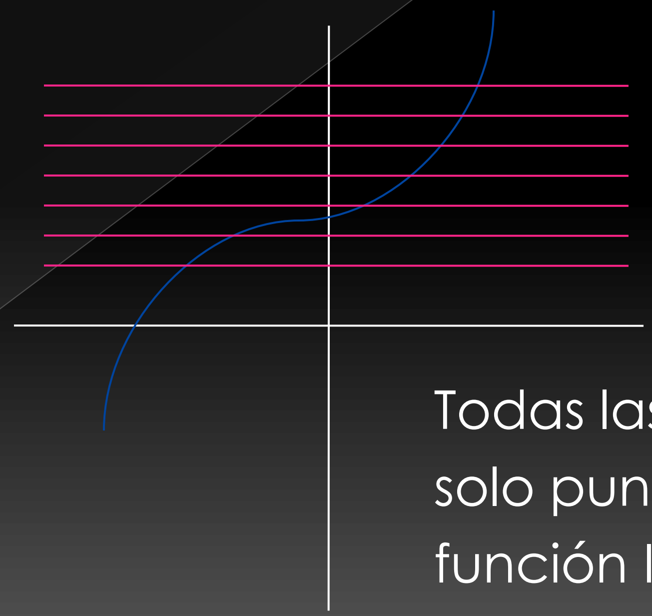
$$Y = \frac{1}{2}$$

1.2.2 Criterio de la recta vertical

Una curva en un plano cartesiano representa una función Inyectiva si y solamente si cualquier recta horizontal intercepta su grafica máximo en un punto.

Una función x→ y es Sobreyectiva si y solo si todos sus elementos de y se encuentran relacionados con algún elemento en x.

$$\forall\ y \in\ \exists\ x \in x\ [\ y=f(x)]$$

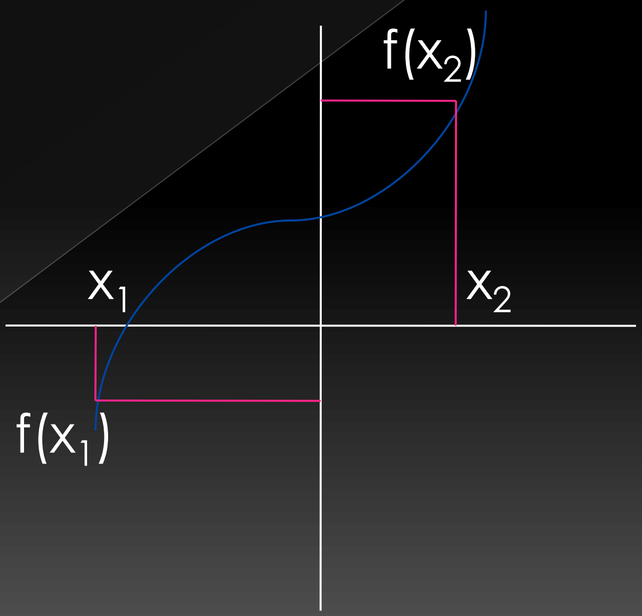


Todas las rectas cortan en un solo punto por lo cual es una función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

1.3 Tipos de funciones
1.3.1 Función Inyectiva

Una función de $x \rightarrow y$ es Inyectiva si y solo si para cualquier elección x_1 , x_{2} . Si x_1 es diferente a x_2 en el dominio de la función entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

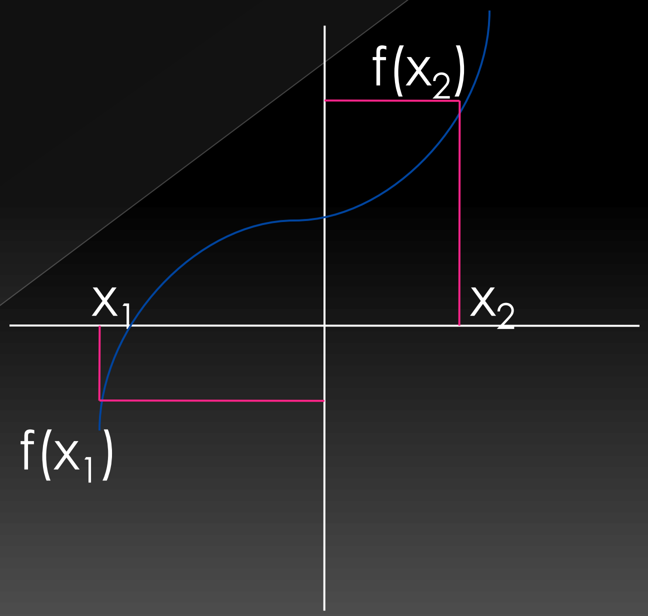
$$\forall x_1 , x_2 \in [(x_1 \neq x_2) \rightarrow (f(x) \neq f(x_2))]$$



1.3.2 Función Sobreyectiva

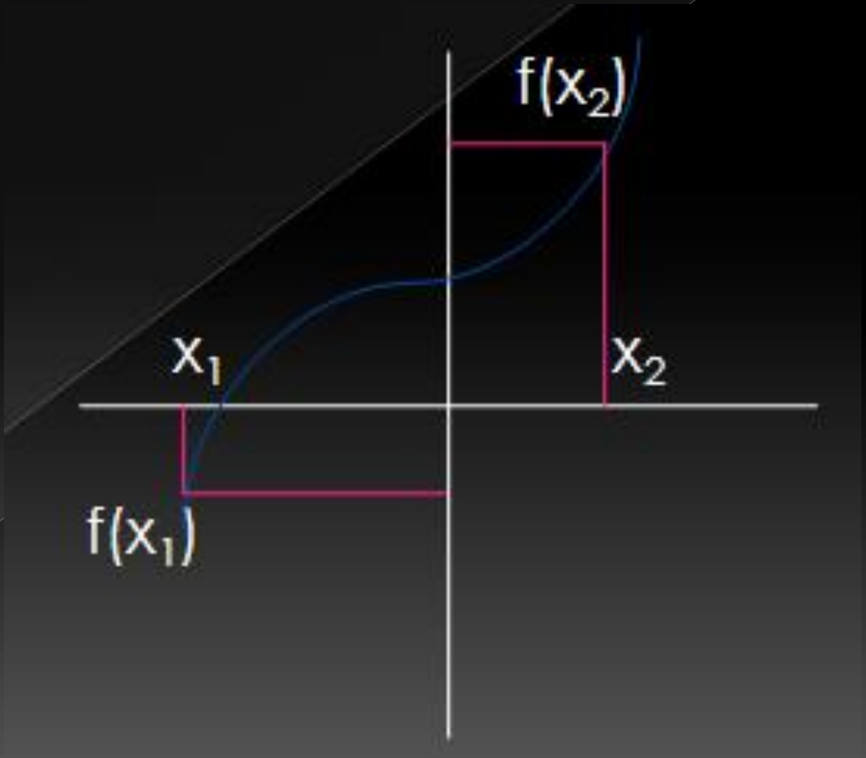
Una función x→ y es Sobreyectiva si y sólo si todos los elementos de y se encuentran relacionados con algún elemento en x.

$\forall$ y∈IR ∃I x∈ x [y=f(x)]



1.3.3 Función Biyectiva

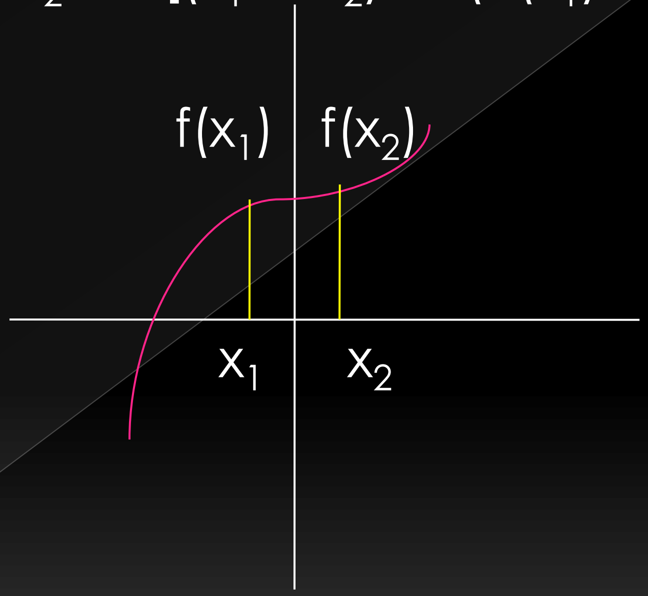
Una función de x→ y es Biyectiva si y solo si es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.



1.3.4 Función Creciente

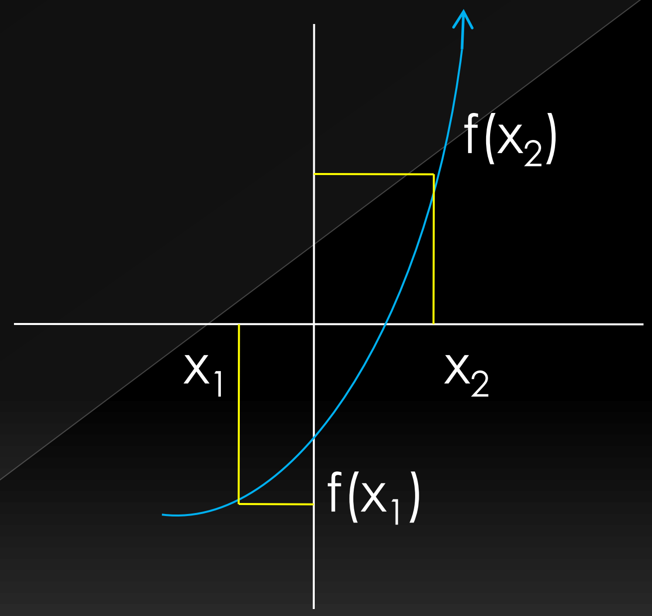
Función Creciente

$$\forall x_1, x_2 \in I\ [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))]$$



Función Estrictamente Creciente

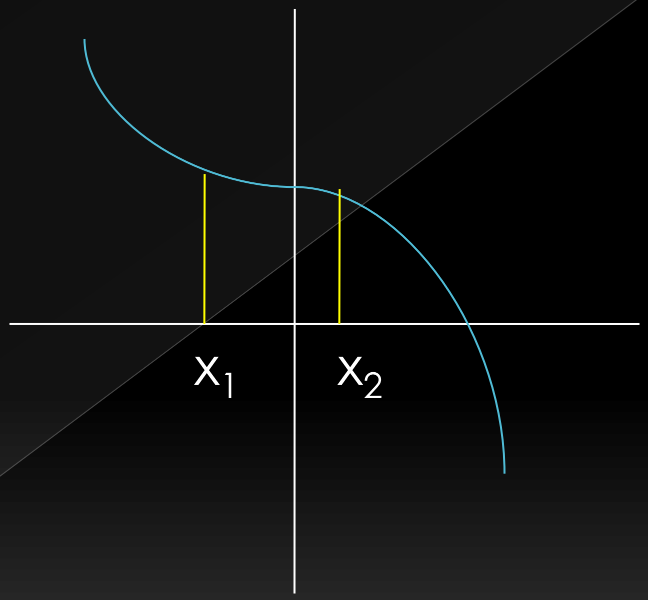
$$\forall x_1 , x_2 \in I \; [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))]$$



1.3.5 Función Decreciente

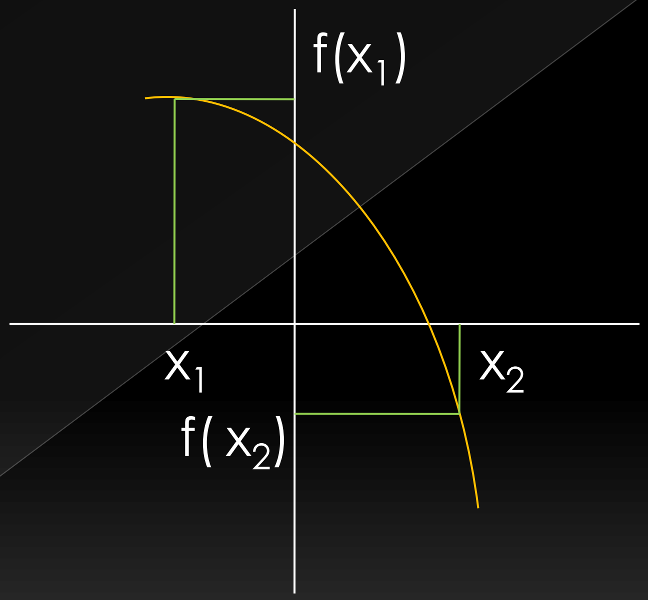
Función Decreciente

$$\forall x_1, x_2 \in I\ [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))]$$



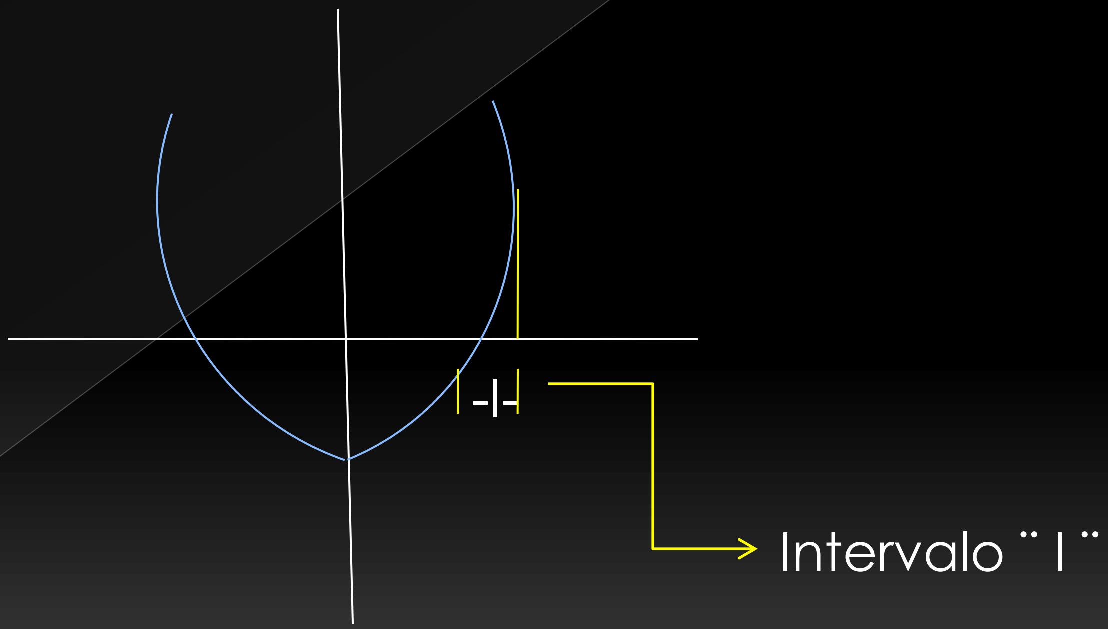
Función Estrictamente Decreciente

$$\forall x_1 , x_2 \in I \, [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))]$$



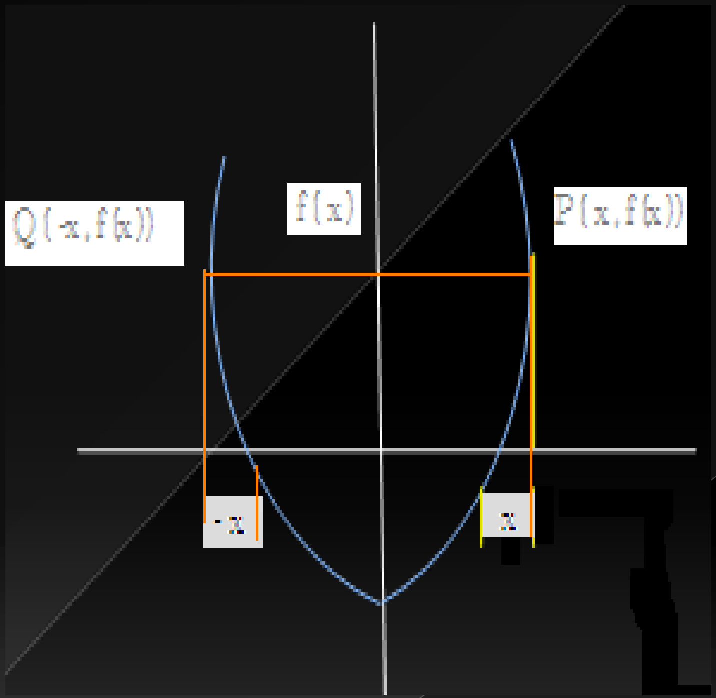
Función Monótona

Se dice que una función es monótona en el intervalo I si es estrictamente creciente o decreciente



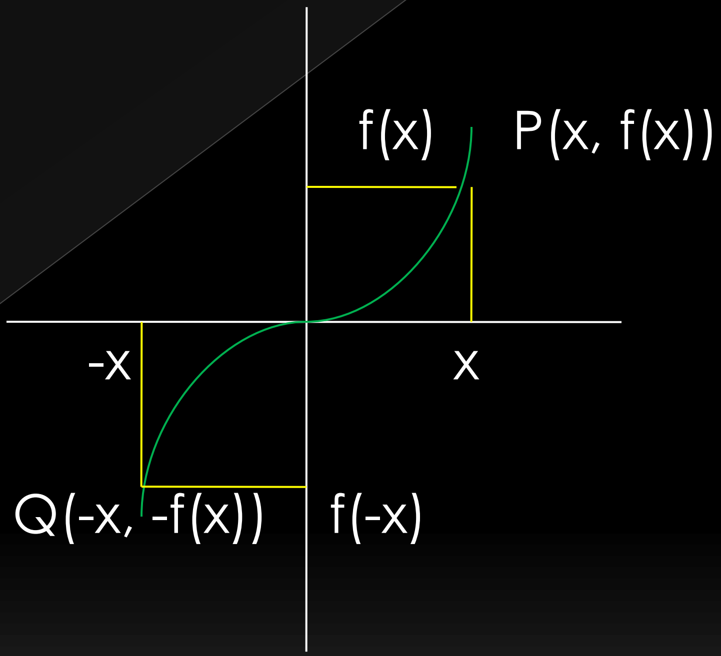
1.3.6 Función Pares o Impares

Función Par



$f\ (x) = f\ (-x)$

Función Impar

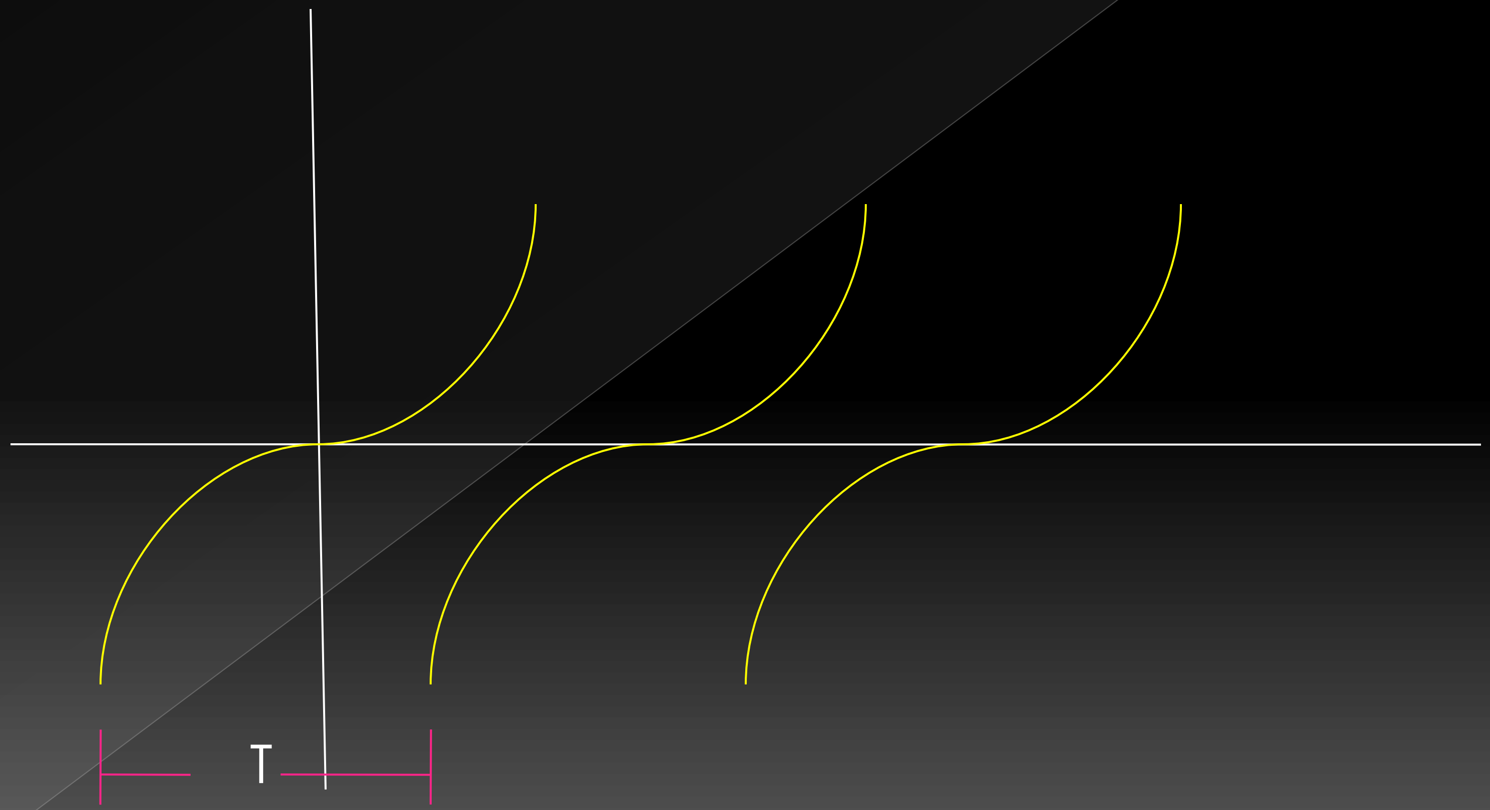


$f(-x) = -f(x)$

1.3.7 Funciones periódicas

Una función $f(x)$ que cumple con la propiedad

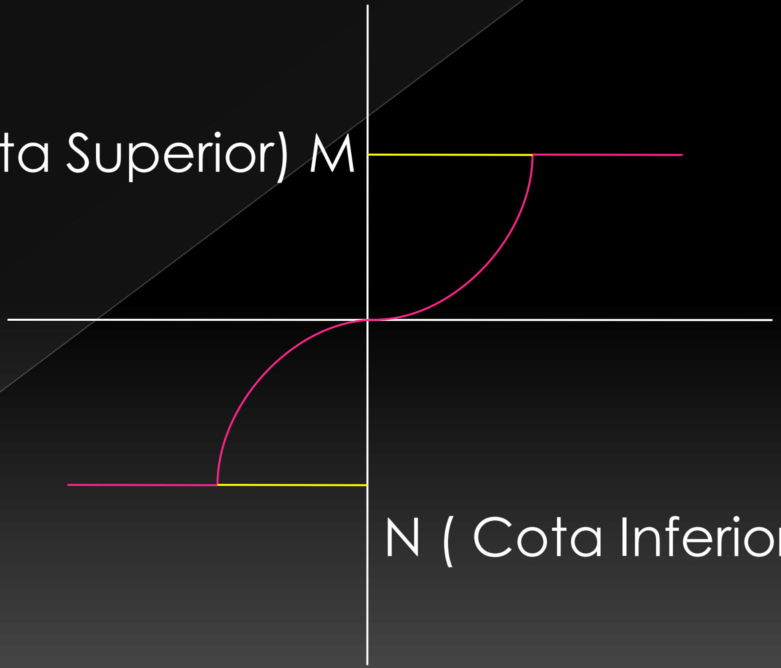
$\exists\ T \in R^{+}\ \forall x \in \text{dom } f$ (tal que) $[f(x+T) = f(x)]$



1.3.8 Funciones Acotadas

Una función f tiene la propiedad ∃ M,N∈R ∀ x ∈ dom f[N≤ f(x)≤ M]. Se dice que es una función donde M, N son valores reales a las que se denomina COTA SUPERIOR y COTA INFERIOR.

(Cota Superior) M



N (Cota Inferior)

1.4 Asíntotas de las graficas de una función de variable real
1.4.1 Asíntotas Horizontales

Cuando x tiende al infinito negativo o tiende al infinito positivo, los valores de f(x) tiende a algún numero fijo L entonces la recta y=L representa una asíntota horizontal de la grafica f(x). Ejemplo:

Sea

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim x \to \infty^{+} = \frac{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{1}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{4}{1} - \frac{\cancel{1}}{x^2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{\cancel{x^2}}} = 4$$

y=4

1.4.2 Asíntotas Verticales

Determinar la asíntota vertical de la siguiente función de variable real.

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^2-4}$$

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

La función de variable real tiene dos asíntotas verticales.

1.5 Funciones definidas por tramos

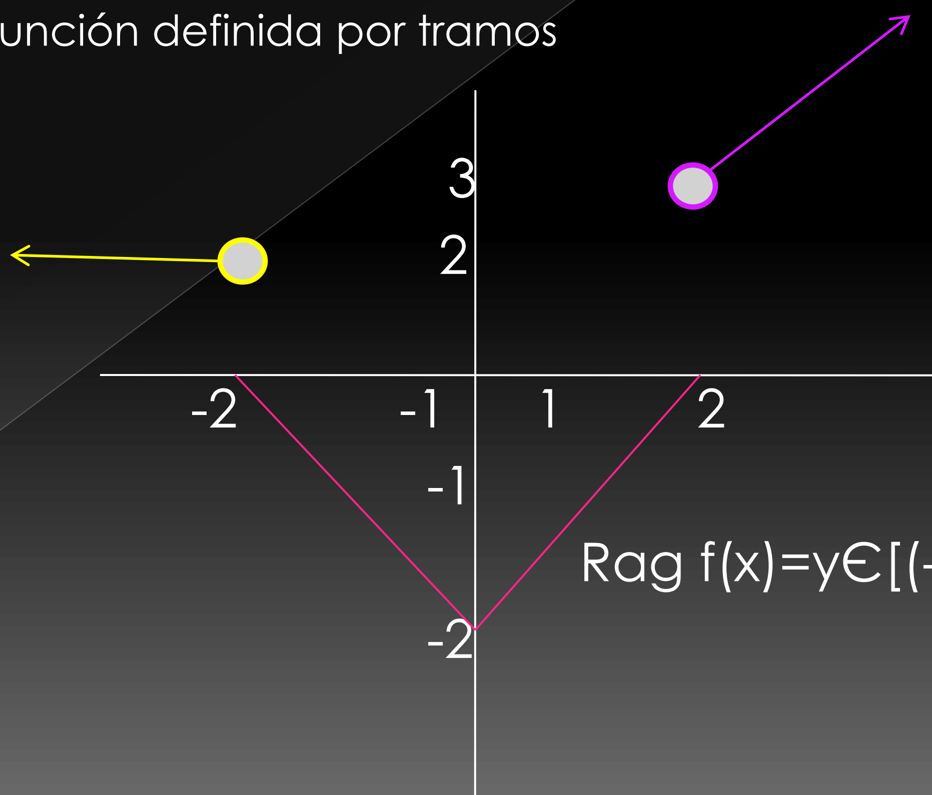
Se define como una función definida por tramos o seccionada a aquellas funciones que presentan diferentes comportamientos en distintos intervalos de su dominio. Las funciones definidas por tramos presentan reglas de comportamiento que tienen la siguiente forma:

$|x|-2\ ;\ -2\leq x\leq 2$

$x+1;\ x>2$

$2\ ;\ x<-2$

Traficación de la función definida por tramos



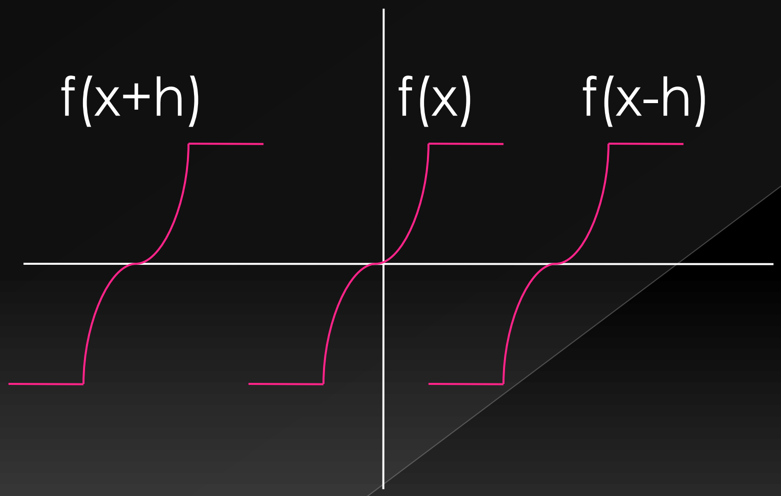
Rag $f(x)=y\in[(-2,\ 0)\vee(3,\infty+)]\vee\{2\}$

1.6 Técnicas de Graficación

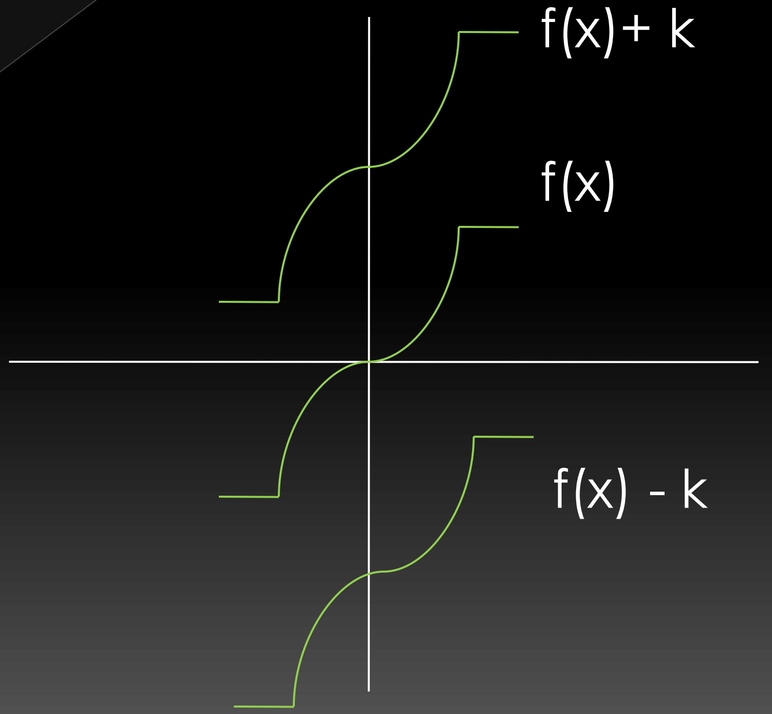
1.6.1 Desplazamientos

Los desplazamientos pueden darse horizontal o verticalmente, es decir podemos mover la grafica de una función hacia la derecha o hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo.

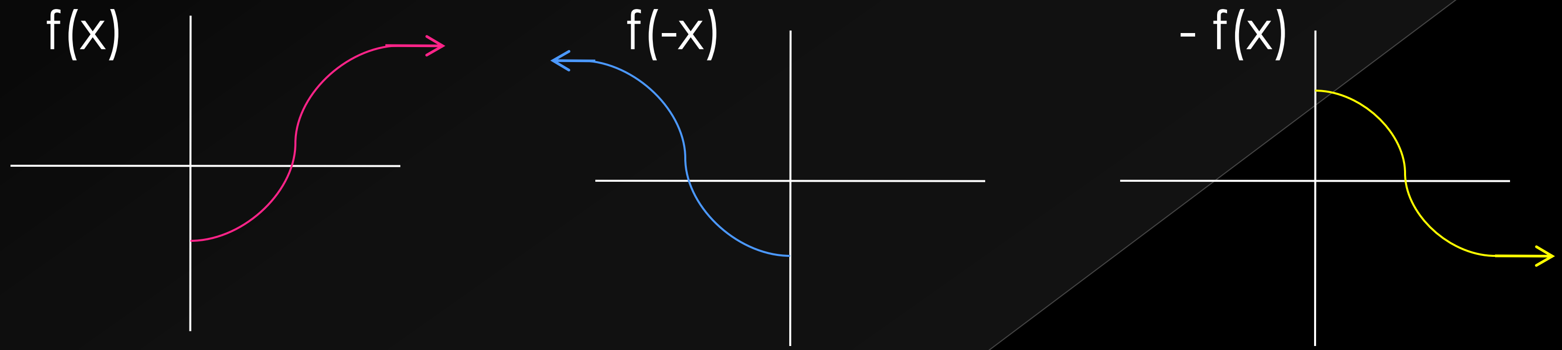
Desplazamiento Horizontal



Desplazamiento Vertical



1.6.2 Reflexiones



1.6.3 Comprensión o alargamiento

Si y=f(x) entonces la grafica de la función
y= f(x) para los valores de a>1, la graf.
De f presenta un ALARGAMIENTO VERTICAL

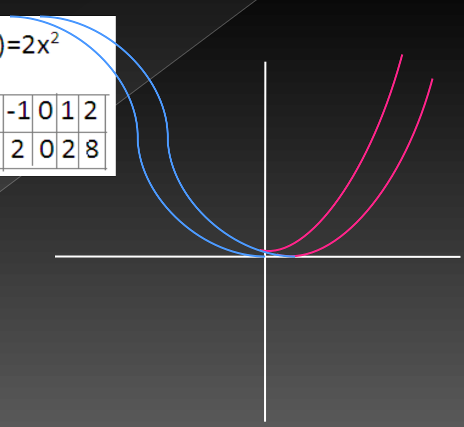
Si a< 0 <1 la grafica presenta
Una COMPRENSION HORIZONTAL

$f(x)=x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

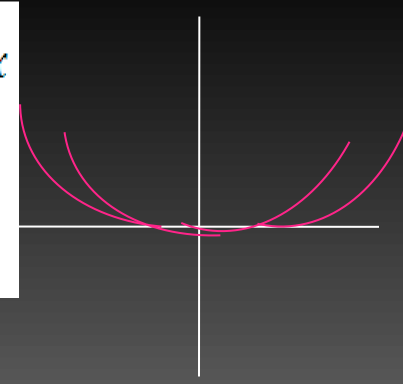
$f(x)=2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



$f(x)=\frac{1}{2}x$

$f(x)=\frac{1}{3}x$



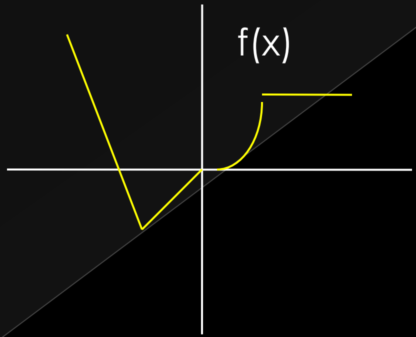
1.6.4 Valores absolutos

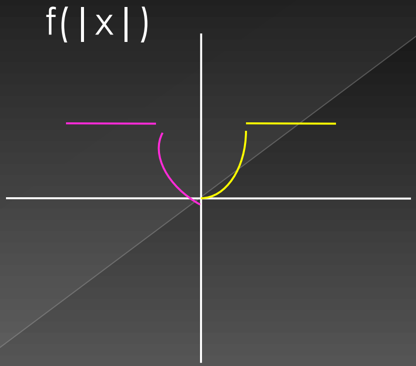
Dada la regla de correspondencia de la función f se puede generar los siguientes funciones.

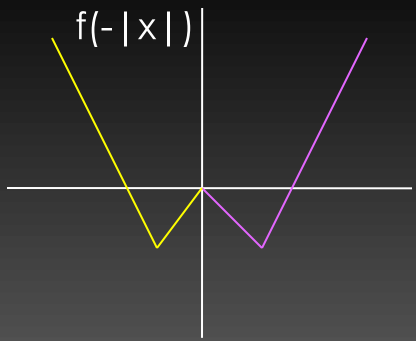
1.- f(x), la grafica de las funciones se refleja con respecto al eje y cuando x es mayor que cero .

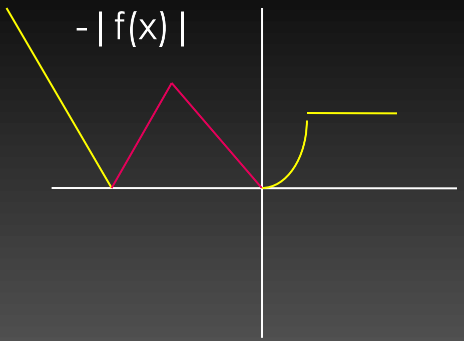
2.- f(-|x|), reflexión de la grafica cuando x es menor que cero con respecto al eje y.

3.- |f(x)|, reflexión de la grafica de la función cuando y es menor que cero con respecto al eje x.







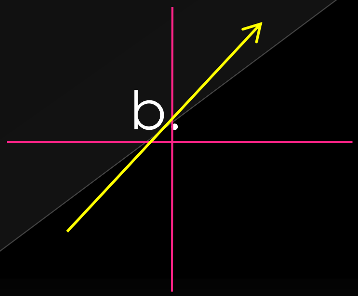


Operaciones entre funciones

2.1 Funciones Lineales
2.1.1 Definición
2.1.2 Aplicación
2.2 Funciones cuadráticas
2.2.1 Definición
2.2.2 Forma canoníca de la función cuadrática
2.2.3 Rango de la función cuadrática
2.2.4 Grafica de la función cuadrática
2.2.5 Aplicación
2..3 Operaciones con funciones
2.3.1 Suma de funciones de variable real
2.3.2 Diferencia
2.3.3 Producto
2.3.4 Cociente
2.3.5 Propiedades de las operaciones sobre los tipos de funciones
2.3.6 Composición Funciones
2.4 Funciones Especiales
2.4.1 Función Valor Absoluto
2.4.2 Función Signo
2.4.3 Función Escalón
2.4.4 Función Entero Mayor
2.5 Función Inversa de una función Inyectiva
2.6 Función polinomiales
2.6.1 Definición
2.6.2 Grafica
2.6.3 Cero de multiplicidad
2.6 .4 Valor intermedio
2.6.5 teorema de numero de ceros
2.7 Regla de los signos

2.1 Funciones Lineales
2.1.1 Definición

Sean a y b números R, la función de variable real cuya regla de correspondencia es $f(x)= ax+ b$, recibe el nombre de la función lineal. Su grafica es una línea recta cuya pendiente esta dada por a y se intercepta con el eje y , es la ordenada b.



Dom $f = x \in R$

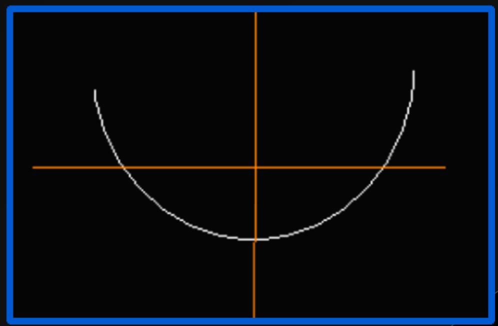
Rag $f = y \in R$

La grafica de la función lineal es creciente si $a>0$ y es decreciente si $a<0$. La función es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez

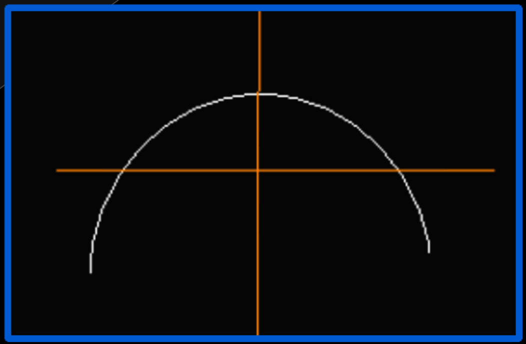
2.2 Funciones cuadráticas
2.2.1 Definición

Sea a, b y c ∈ R con a ≠ 0, la función f de variable real cuya regla de correspondencia es ax^2+bx+c recibe el nombre de FUNCION CUADRATICA . Su grafica correspondiente a un lugar geométrico llamada parábola.

a>0



a<0



2.2.2 Forma canoníca de la función cuadrática

Mediante el método de completacion de cuadrados obtenemos una forma equivalente a

f(x)= ax^2+bx+c

f(x)=y

y= ax^2+bx+c

$$y= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

$$y= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{2}\right)+c-a\left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{a}\right)$$

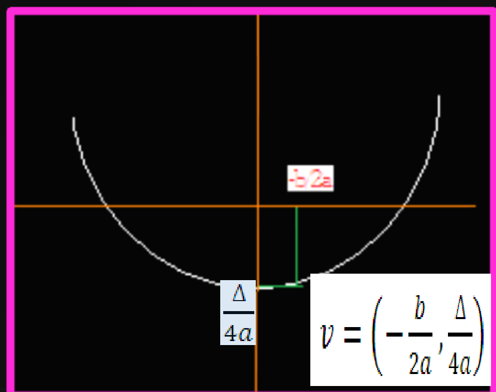
$$y= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$y= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

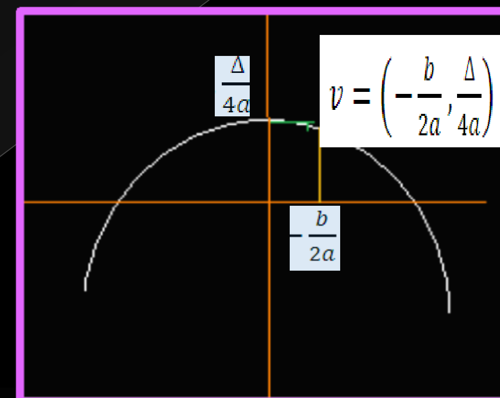
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2.2.2 Forma canoníca de la función cuadrática

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a}\right)$$



Rag f(x)= y Є[$\frac{\Delta}{4a}$,∞+)



Rag f(x)= yЄ(-∞, $\frac{\Delta}{4a}$]

2.3 Operaciones con funciones
2.3.1 Suma de funciones de variable real

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Si $f(x)= 3x+4$ $\qquad g(x)= 7x-2$

$$(f+g)= 10x+2$$

2.3.2 Diferencia

$$f(x) - g(x) = (f-g)(x)$$

Si $f(x)= 3x+4$ $\qquad g(x)=7x-2$

$$(f-g)(x)= -4x+6$$

2.3.3 Producto

$$f(x) . g(x)=(f.g)(x)$$

$f(x)=3x-2$ $\qquad g(x)=4x+3$

$$(f.g)(x)= -4x+6$$

2.3.4 Cociente

$$f(x) \div g(x) = (f/g)(x)$$

$f(x)=x^2-1 \quad g(x)=3x-3$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{3x+3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{3}$$

2.3.5 Propiedades de las operaciones sobre los tipos de funciones

La suma(diferencia) y el producto(cociente) de 2 funciones pares, es par.

$$f(x)+g(x)= (f+g)(x)$$

$$f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

$$f(f+g)(-x)= (f+g)(-x)$$

$f(x)=x^2-1$

$g(x)= 2x^2+3$

$(f+g)(x)=3x^2+2$

$(f+g)(-x)=3(-x)+2$

$(f+g)(-x)=3x^2+2$

- La suma (diferencia) de 2 funciones impares, es impar.

$f(x)=3x^3-x$

$g(x)=x^5+x^3$

$(f+g)(x)=x^5+4x^3+x$

- El producto(cociente) de 2 funciones impares es una función par.

$f(x)=x^5$

$g(x)=x^3$

$(f.g)(x)=x^8$

$(f.g)(x)=x^8$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^3}{x^5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\frac{1}{(-x)^2}$$

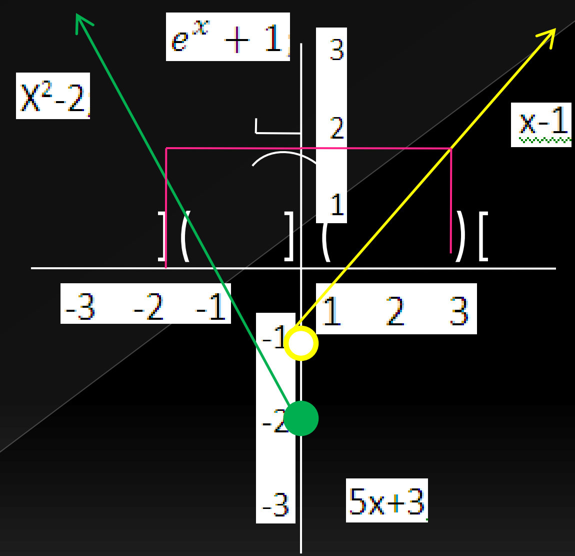
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x^2}$$

- La suma (diferencia) de una función par y una impar ambas diferentes de cero no es ni una función par ni una impar.
- El producto (cociente) de una función par y una impar es una función impar.
- La suma de 2 funciones crecientes o decrecientes, también es una función creciente o decreciente.

2.3.6 Composición Funciones

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Si $f(x) = \begin{cases} e^{x} + 1; x \geq 2 \\ 5x+3; x < 2 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} X^2-2; x \leq 0 \\ x-1; x>0 \end{cases}$



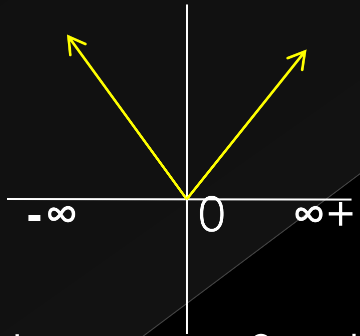
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} e^{x^2-2} + 1; x \leq -2 \\ 5(x^2-2)+3; -2<x\leq 0 \\ 5(x-1)+3; 0<x<3 \\ e^{x-1} + 1; x \geq 3 \end{cases}$$

2.4 Funciones Especiales
2.4.1 Función Valor Absoluto

Sea f una función de variable real cuya regla de correspondencia es f(x)=|x|. Su grafica nos indica que el dominio son todos los números reales y el rango son los reales positivos incluyendo al cero.

f(x)

$$|x| = \begin{cases} x; \ x \geq 0 \\ x; \ x < 0 \end{cases}$$

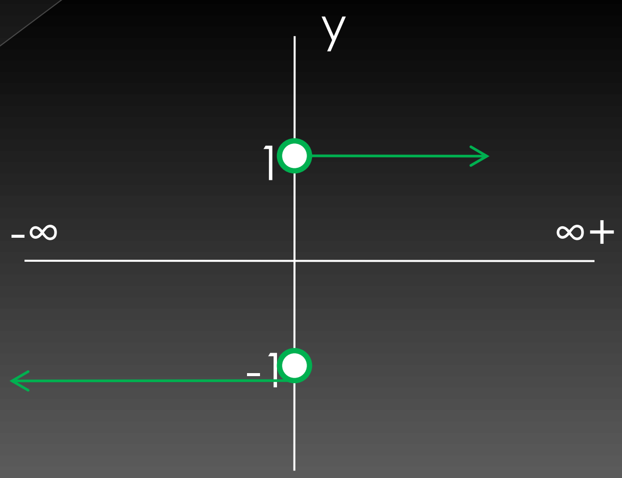


La función es par, es decreciente para x<0 y decreciente x ≥ 0

2.4.2 Función Signo

Sea una función de variable real cuya regla de correspondencia esta dada por:

$$\text{Sgn } f(x) = \begin{cases} 1; \ x > 0 \\ o; \ x = 0 \\ 1; \ x < 0 \end{cases}$$

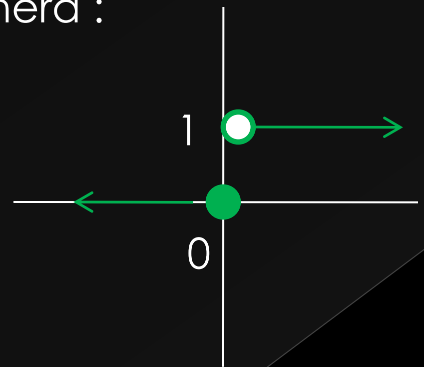


2.4.3 Función Escalón

$$f: R \rightarrow R$$
$$X \rightarrow f(x) = \mu(x)$$

Sea f(x), una función de variable real, cuya regla de correspondencia esta definida de la siguiente manera :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases}$$



2.4.4 Función Entero Mayor

Se puede definir para un numero real en x como el mayor entero menor o igual que por:

$$f: R \rightarrow R$$
$$X \rightarrow f(x) = [[x]] \ : n \leq x < n+1$$

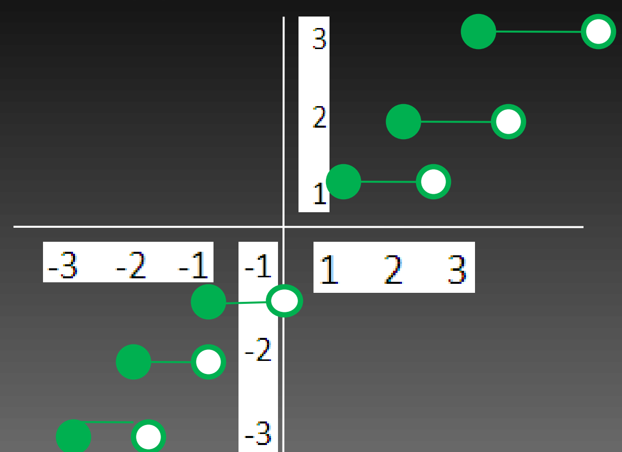
x∈R

[[x]]

[[2,1]]=2

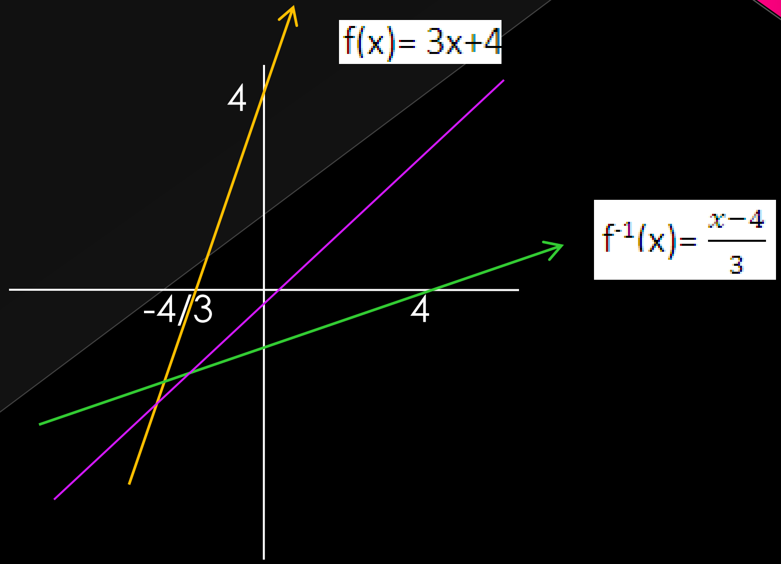
[[0,5]]=0

[[-2,7]]= -3



2.5 Función Inversa de una función Inyectiva

Una función de variable real f es Biyectiva si y solo si f es Inyectiva y Sobreyectiva. Una función f es inversible si es Biyectiva es decir es una función uno a uno.



dom f = rag f^{-1}

rag f = dom f^{-1}

(f 0 f^{-1}) (x)= x

(f o f^{-1}) (x)= f(f^{-1} (x))

$= 3\left(\frac{x-4}{3}\right) + 4$

$=$ x-4 +4

$=$ x

2.6 Función polinomiales

Una función polinomial es una función de la forma:

Donde($a_n + a_{n-1}$) son Є R. El dominio de la función son todos los números reales, el grado de la función polinomial es el mayor exponente de la variable, presente en el polinomio en este caso el exponente n es diferente de cero.

2.6.3 Cero de multiplicidad m

Si $(x+r)^m$ es un factor de una función polinomial f y $(x+r)^{m+1}$ no es un factor de f, entonces r es llamado CERO DE MULTIPLICIDAD m.

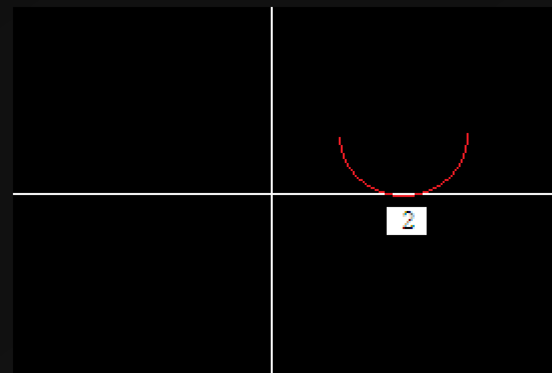
$(x+r)^m$

$(x-2)^2= x^2-4x+4$

$(x+r)^{m+1}$

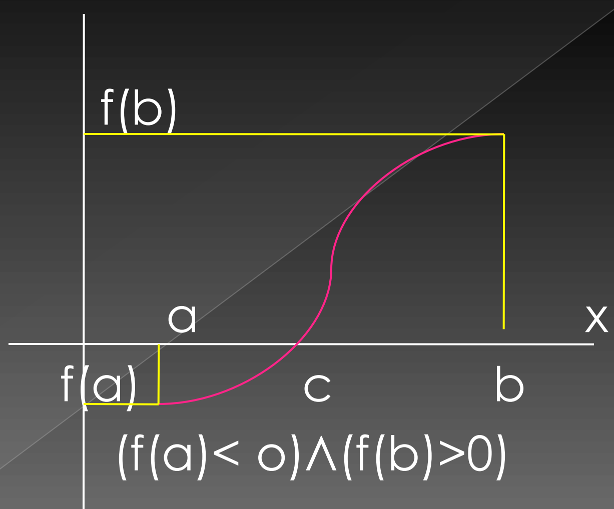
x=2 de multiplicidad 4

$(x-2)^4=0$

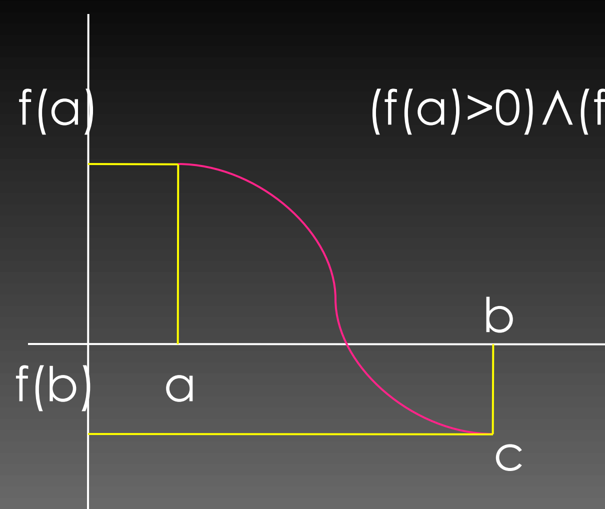


2.6 .4 Valor intermedio

Sea f una función polinomial, si a<b y además f(a) y f(b) son de signos opuesto, entonces hay al menos un cero de f entre a y b.



$(f(a)>0)\wedge(f(b)< 0)$



2.6.5 teorema de numero de ceros

Una función polinomial no puede tener mas ceros que el valor de su grado. La demostración esta basada en el teorema del factor. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces f(r)=0 y (x-r) es un factor de f(x), por lo tanto cada cero corresponde a un factor de grado 1. El resultado es consecuencia de que f no puede tener mas factores de primer grado que el valor de su grado.

Teorema de los signos de descarte

Sea f una función polinomial:

- El numero de ceros positivos de f es igual al numero de variaciones en el signo de los coeficientes de f(x) o es igual que ese numero menos un entero par.
- El numero de ceros negativos de f es igual al numero de variaciones en el signo de los coeficientes de f(-x), o es igual que ese numero menos un entero par.

Teorema de los ceros racionales

Sea f una función polinomial de grado uno o superior de la forma:

$$f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{1x} + a_0$$

$$a_n \neq 0 \qquad a_0 \neq 0$$

donde cada coeficiente es un entero. Si $\frac{p}{q}$ irreducible es un cero racional de f, entonces p puede ser un factor de a_0 y q un factor de a_n .

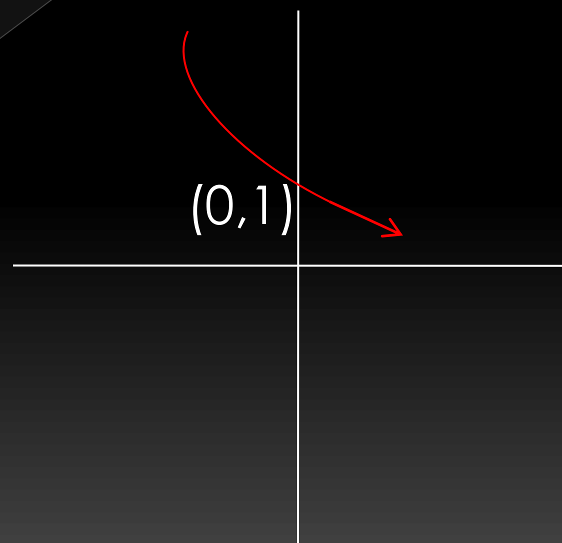
Funciones exponenciales y Logarítmicas

- Funciones Exponenciales

Se conoce como función exponencial a la función de variable real cuya regla de correspondencia es $f(x)= a^x$,($a>0 \wedge a\neq 1$), $X \in R$.

$f(x)= a^x, a > 1$

$f(x)=a^x, 0 < a < 1$

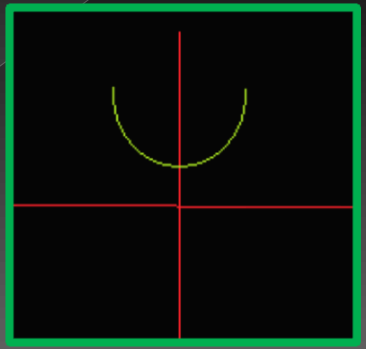


En la graf. De la función exponencial podemos anotar las siguientes características:

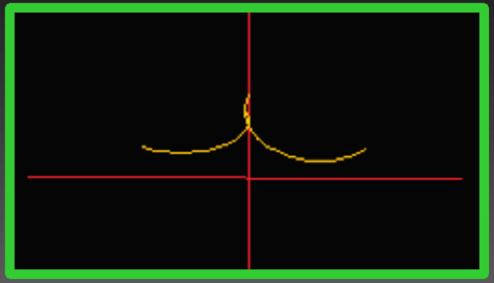
1. El dom de la función son los números reales y el rango los R+
2. La función $f(x)= a^x$, para a>1 presenta un crecimiento exponencial y para $f(x)= a^x$ o<a<1 , presenta un decrecimiento exponencial.
3. La graf. de la función exponencial presenta un intercepto en el eje y en el punto (0,1).
4. La graf. Presenta una asíntota horizontal, es decir es semi acotada inferiormente.

Aplicaciones

$f(x)=2^{|x|}$



$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$



Función Exponencial Natural

La función exponencial natural presenta como base al numero **e** cuyo valor es 2,7182 por ser **e**>1 la $f(x)=e^x$, presenta la grafica:

El valor de **e** proviene de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiene tendencia al∞+

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182 = e$$

Función Logarítmica

Se conoce como logarítmica a la función f de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\log_a x,\ x\in \mathbb{R}^+ \wedge (a>0 \wedge a\neq 1)$$

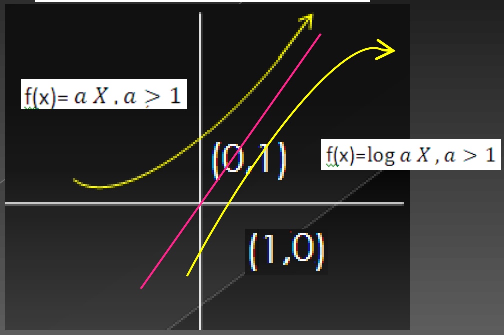
Siendo a la base y el argumento.

Función Exponencial		Función Logarítmica
$a^x = y$	$a^y = x$	$y = \log a\ X$

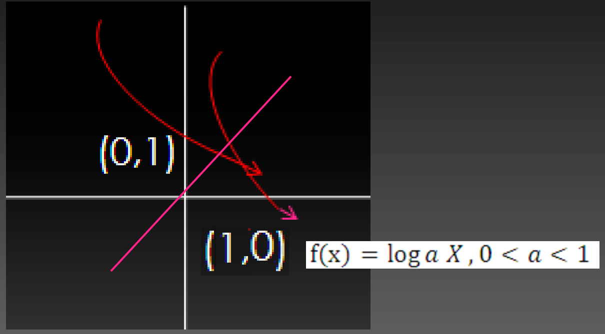
Grafica de la Función Logarítmica

$$f(x)=\log_a x,\ x\in \mathbb{R}^+ \wedge (a>0 \wedge a\neq 1)$$

$f(x)=\log a\ X\ ,\ a > 1$

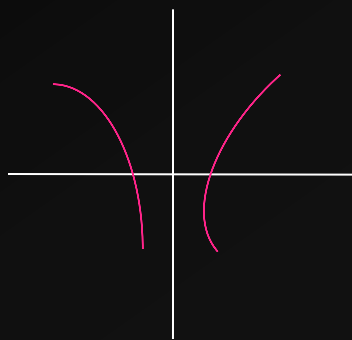


$f(x) = \log a\ X\ , 0 < a < 1$

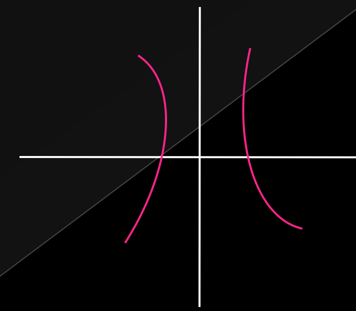


Aplicaciones

$f(x) = log_2|x|$



$f(x) = log_{\frac{1}{3}}|x|$



Propiedades de los Logaritmos

(a≠1 ∧ a>0) o (0,1) v (1, ∞+)

1. $-log_a 1 = 0$

2. $-log_a a = 1$

3. $-\ a^{log_a M} = M$

4. $-log_a a^m = m$

5. $-\ log_a(MN) = log_a M + log_a N$

6. $-log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N$

7. $-log_a M^n = n log_a M$

8. $-\ log_a \sqrt[n]{M} = log_a(M)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} log_a M$

Aplicaciones

Hallar el valor de:

$$\log_3\left(\frac{3^4 . 5^6}{2^5 . 3^6}\right)^4 = 4(\log_3 3^4 + \log_3 5^6 - \log_3 2^5 - \log_3 3^6)$$

$$= 4(4\log_3 3 + 6\log_3 5 - 5\log_3 2 - 6\log_3 3)$$

$$= 4(-2 + 6\log_3 5 - 5\log_3 2)$$

$$= -8 + 24\log_3 5 - 20\log_3 2$$

Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales

Las igualdades o desigualdades que contienen términos de la forma a^x se denominan ecuaciones o inecuaciones exponenciales. Estas expresiones exponenciales se las pueden incluir en predicados considerando que su solución es subconjunto de los números reales, es decir que el conjunto referencial son los números reales.

$$(a^m = a^n) \leftrightarrow (m = n)$$

POR IGUALACION DE BASES

$$p(x) = 8^{x+1} - 2^{x+2} = 0$$

$$8^{x+1} = 2^{x+2}$$

$$2^{3(x+1)} = 2^{x+2}$$

$$3(x+1) = x+2$$

$$3x + 3 = x + 2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$Ap(x) = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

POR PROPIEDADES

$$q(x) = 3^{x+2} - 2^{x+1} = 0$$

$$3^{x+2} = 2^{x+1}$$

$$\log 3^{x+2} = \log 2^{x+1}$$

$$(x+2)\log 3 = (x+1)\log 2$$

$$x\log 3 + 2\log 3 = x\log 2 + \log 2$$

$$x\log 3 - x\log 2 = \log 2 - 2\log 3$$

$$x = \frac{\log 2 - 2\log 3}{\log 3 - \log 2}$$

POR CAMBIO DE VARIABLE

$$r(x) = 16^x + 4^x - 2 = 0$$

$$4^{2x} + 4^x - 2 = 0$$

$$u = 4^x$$

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$(u+2)(u-1) = 0$$

$$u + 2 = 0 \quad \wedge \quad u - 1 = 0$$

$$u = -2 \qquad u = 1$$

$$4^x = -2 \qquad 4^x = 1$$

$$4^x = -2 \qquad 4^x = 1 \therefore a^0 = 1$$

$$2^{2x} = -2 \qquad 4^x = 4^0$$

$$log(2^{2x}) = \log(-2) \qquad x=0$$

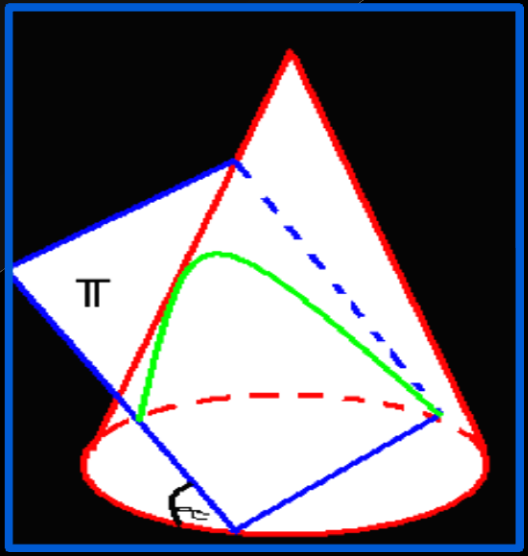
$$x \in \emptyset \qquad Ar(x) = \{0\}$$

Geometría Analítica

9.2Parábola

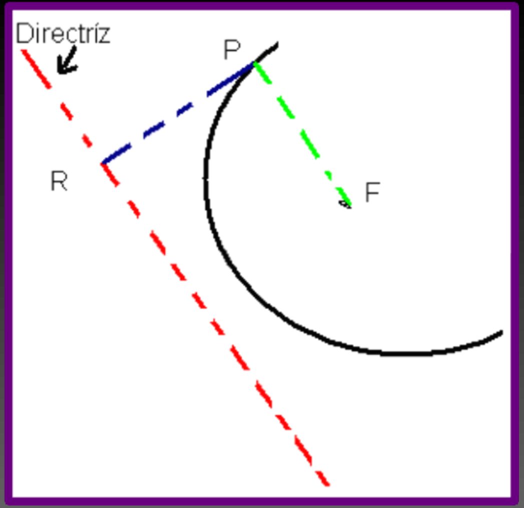
9.2.1 Origen de la Parábola.

La parábola es una sección cónica cuyo origen se da por el corte de un plano a un cono formando un ángulo alfa con respecto a la base del cono.

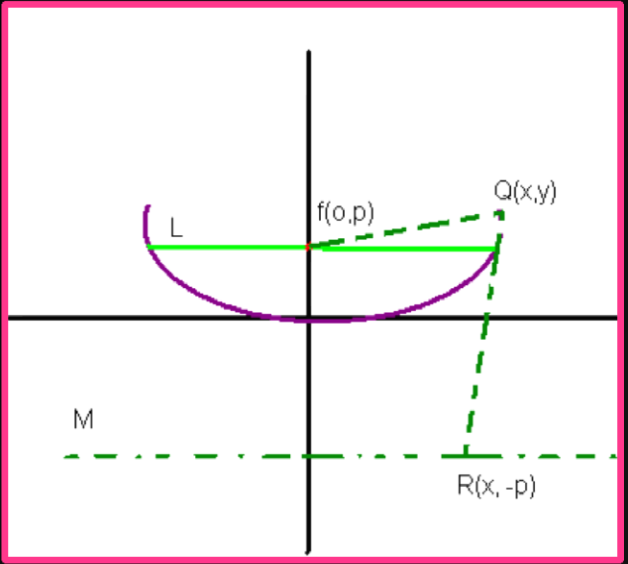


Definición

Una parábola es un conjunto de puntos en el plano R2 que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y una recta llamada **directriz**.



9.2.2 Ecuación de la parábola



$$d\overline{QF} = d\overline{QR}$$

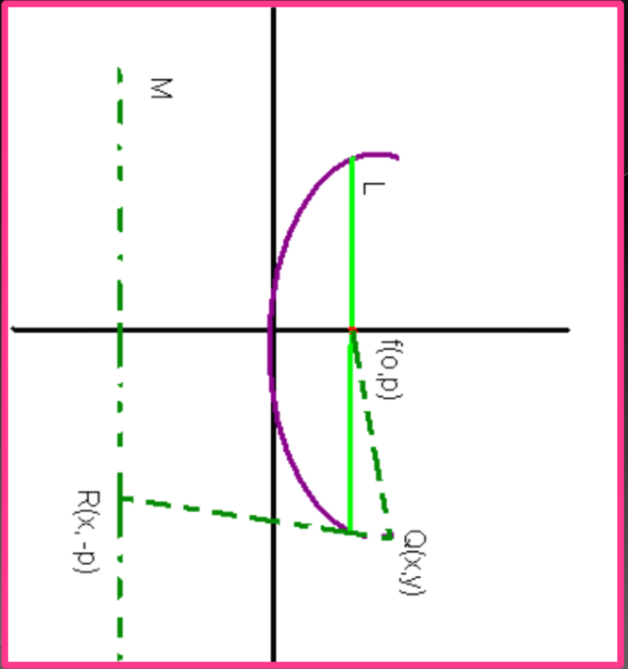
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(0 - x)^2 + (p - y)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (-p - y)^2}$$

$$x^2 - p^2 - 2py + y^2 = 0 + p^2 + 2py + y^2$$

$$x^2 - 2py = 2py$$

$$x^2 = \pm 4py$$



$$d\overline{QR} = d\overline{Qf}$$

$$\sqrt{(-p + x)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(p - x)^2 + (-y)^2}$$

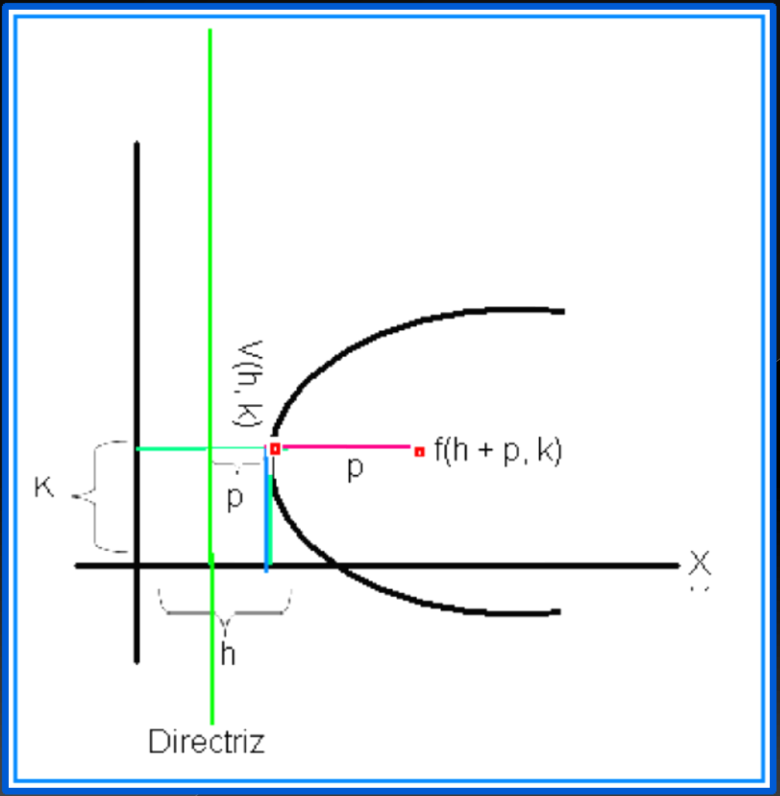
$$x^2 + 2px + p^2 = p^2 - 2px + y^2 + y^2$$

$$2px + 2px = y^2$$

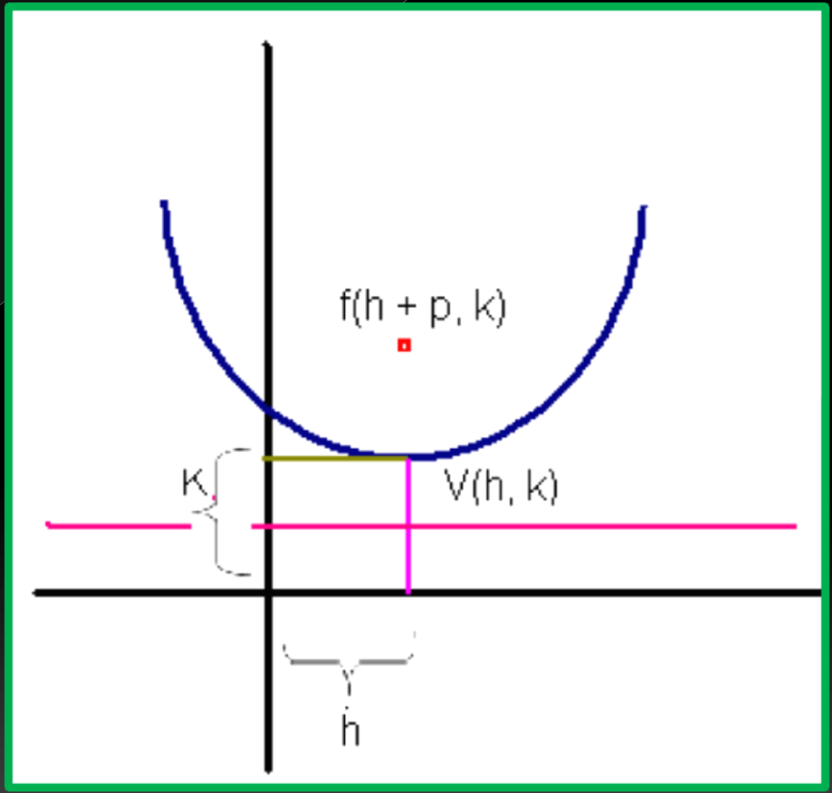
$$y^2 = \pm 4px$$

9.2.3 Parábola con el vértice en el punto (h, k)

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$



$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$



9.2.4 Ecuación General de la Parábola

Parábola Horizontal

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4py$$

$$y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4py = 0$$

$$y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4py = 0$$

$$D = -4p \qquad E = -2k \qquad F = k^2 + 4ph$$

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola Vertical

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$x^2 - 2 + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 - 2xh + h^2 - 4py + 4pk = 0$$

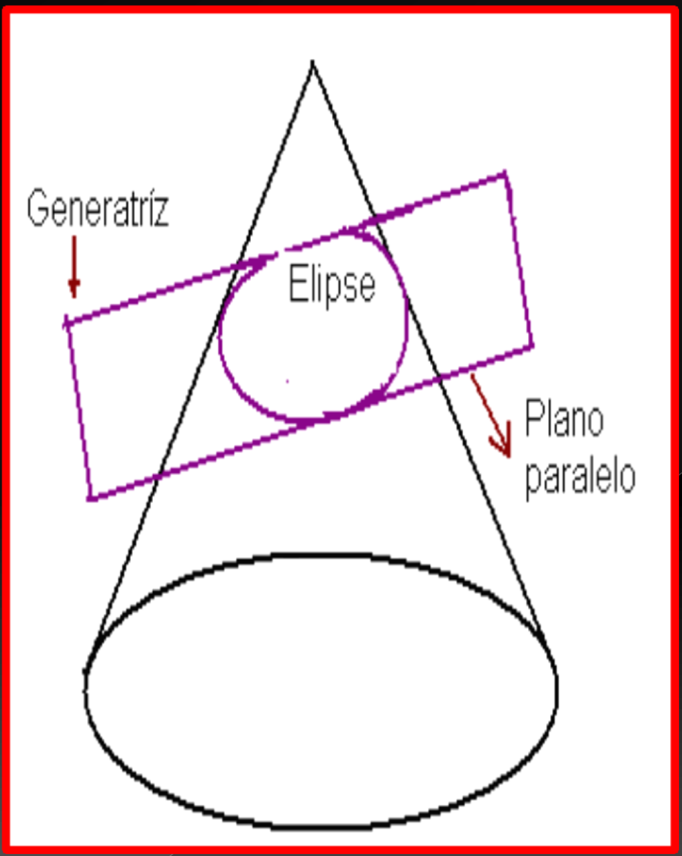
$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$$

$$D = -2p \qquad E = -4p \qquad F = h^2 + 4pk$$

$$Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

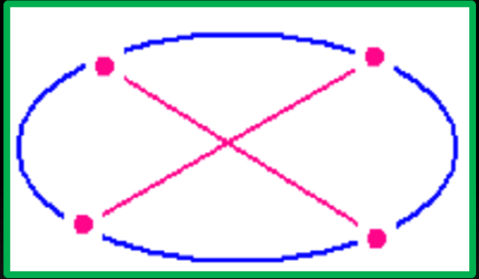
9.3 Elipse
9.3.1 Origen y Definición

Origen



Definición

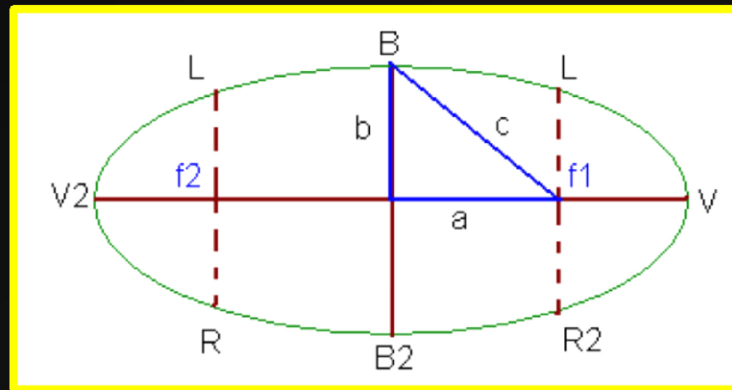
$$Elipse = \left\{ p(x,y) \in \frac{R^2}{dpf}, +dpf_2 = k \right\}$$



$$d\overline{pf_1} + d\overline{pf_2} = K$$

$$K = 2a$$

Elementos de una Elipse

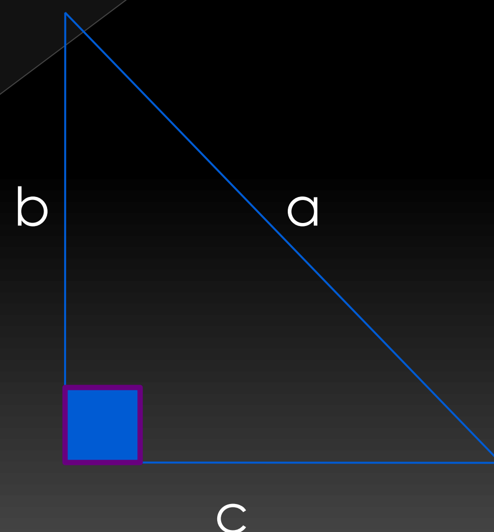


$d\overline{vv_2}$= eje mayor =2a

$d\overline{BB_2}$= eje menor= 2b

$d\overline{ff_2}$ =distancia focal =2c

L_R = Lado recto



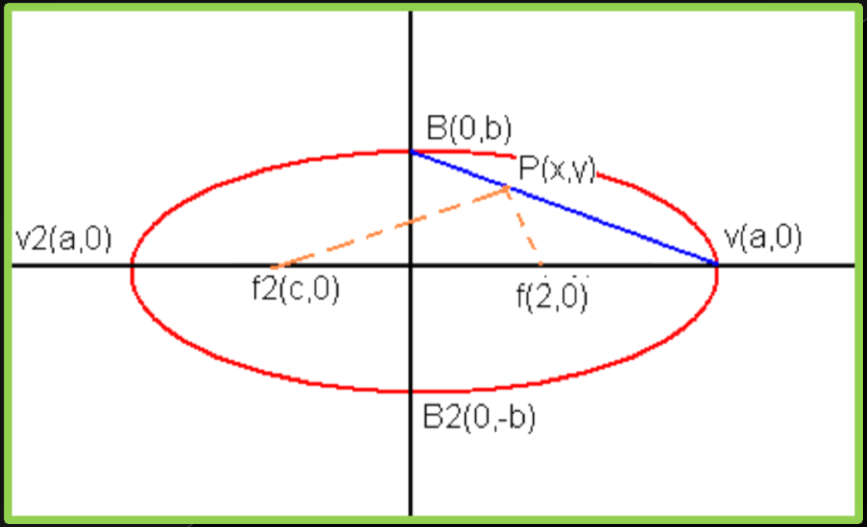
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

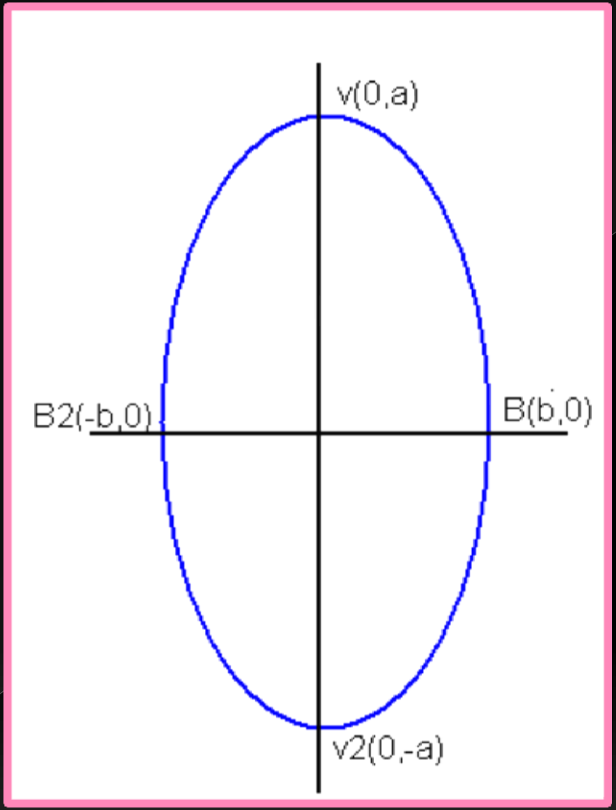
9.3.2 Ecuacíon Canoníca de la Elipse

Elipse Horizontal



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \therefore a>c$$

Elipse Vertical



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \therefore a>c$$