MATEMATICAS DISCRETAS

Propiedades de las relaciones

Propiedad reflexiva

Sea R una relación binaria R en A, ($A \neq \emptyset$).

Definición:

Diremos que R <u>es reflexiva</u> si $\forall a \in A,\ a\,R\,a$

Ejemplo:

1) En **N** la relación R definida por: "$x\,R\,y \Leftrightarrow$ x divide a y"

es reflexiva ya que $\forall x \in \mathbf{N},\ x\,R\,x$ porque x divide a x

2) En **N** la relación R definida por:

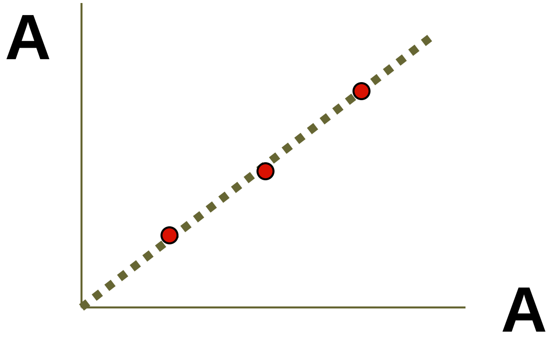
"$a\,R\,b \Leftrightarrow$ a es el doble de b".

no es reflexiva ya que $(1, 1) \notin R$ puesto que 1 no es el doble de 1

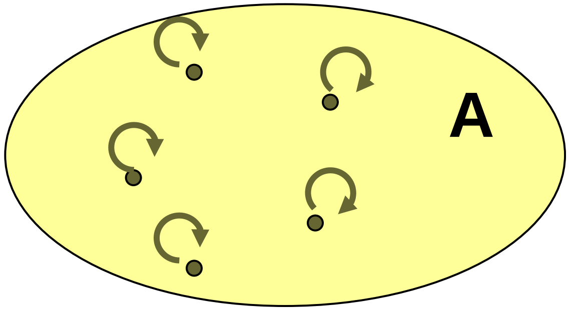
Propiedad reflexiva

Representación Cartesiana

Si la relación *R* es reflexiva entonces la diagonal pertenece a la relación.



Representación Sagital:



Si la relación *R* es reflexiva entonces todo elemento tiene una flecha que comienza y termina en sí mismo (un bucle).

Propiedad simétrica

Definición:

Diremos que R <u>es simétrica</u> si $\forall$ a, b $\in$A: a R b $\Rightarrow$ b R a

Ejemplo:

1) En **Z** la relación R definida por: “a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 2”.

<u>es</u> simétrica ya que si a R b $\Rightarrow$ hay p$\in$Z tal que a – b = 2p

$\Rightarrow$ b – a = 2(-p) con -p $\in$ Z $\Rightarrow$ b R a

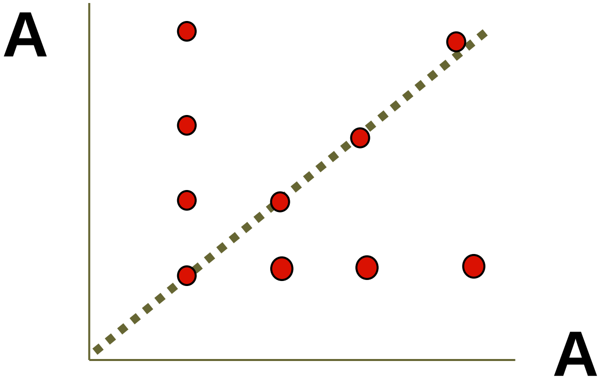
2) En **N** la relación R definida por: “x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y”

<u>no</u> es simétrica ya que 2 R 4 porque 2 divide a 4 pero 4 no divide a 2 por lo tanto (4,2) $\notin R$

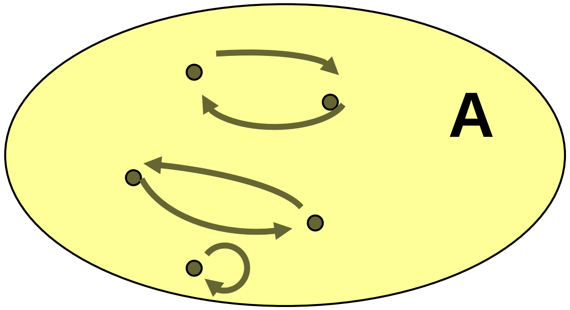
Propiedad simétrica

Representación Cartesiana

Si la relación *R* es simétrica sobre A entonces los pares relacionados se reflejan respecto a la diagonal principal.



Representación Sagital:



Si la relación *R* es simétrica entonces todo par de elementos que tiene una flecha la tiene en las dos direcciones

Propiedad antisimétrica

Definición:

Diremos que R <u>es antisimétrica</u> si $\forall$ a, b $\in$A: $[a\ R\ b \wedge b\ R\ a] \Rightarrow a = b$

Otra manera de expresarlo: Si $a \neq b \Rightarrow [\,(a,b) \notin R \vee (b,a) \notin R\,]$

Ejemplo:

1) En **N** la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y" <u>es</u> antisimétrica

Ya que si a R b y b R a entonces existen n, m $\in$**N** tales que:

b = an y a = bm. Combinándolas, a = bm = (a.n).m $\Rightarrow$ n.m = 1 $\Rightarrow$

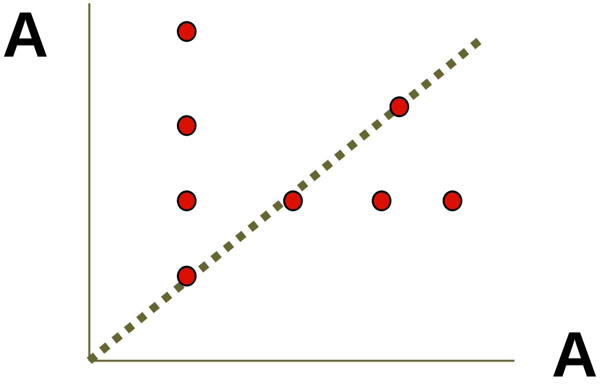
n = m = 1 $\Rightarrow$ a = b.

2) En **Z** la relación R definida por: "a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 2".
<u>no</u> es antisimétrica ya que $2R4$ y $4R2$, pero $2 \neq 4$

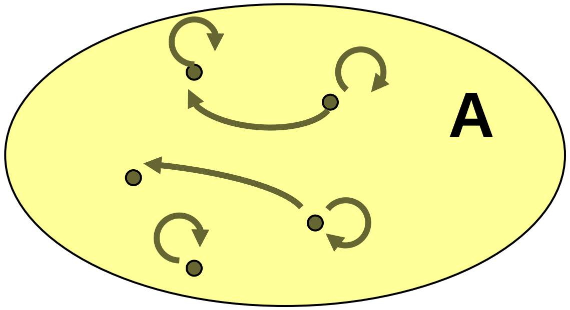
Propiedad antisimétrica

Representación Cartesiana

Si la relación *R* es antisimétrica pueden existir pares por encima o por debajo de la diagonal pero ningún par tiene reflejo respecto a la diagonal principal excepto la diagonal misma.



Representación Sagital:



La relación *R* es antisimétrica si para cada par de elementos distintos relacionados la flecha está solo en un sentido

Propiedad Transitiva

Definición:

Diremos que R es transitiva si $\forall$ a, b, c $\in$A: $[a\ R\ b \wedge b\ R\ c] \Rightarrow a\ R\ c$

Ejemplo:

1) En **N** la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y"

es transitiva ya que si a R b y b R c entonces existen n, m $\in$**N** tales que:

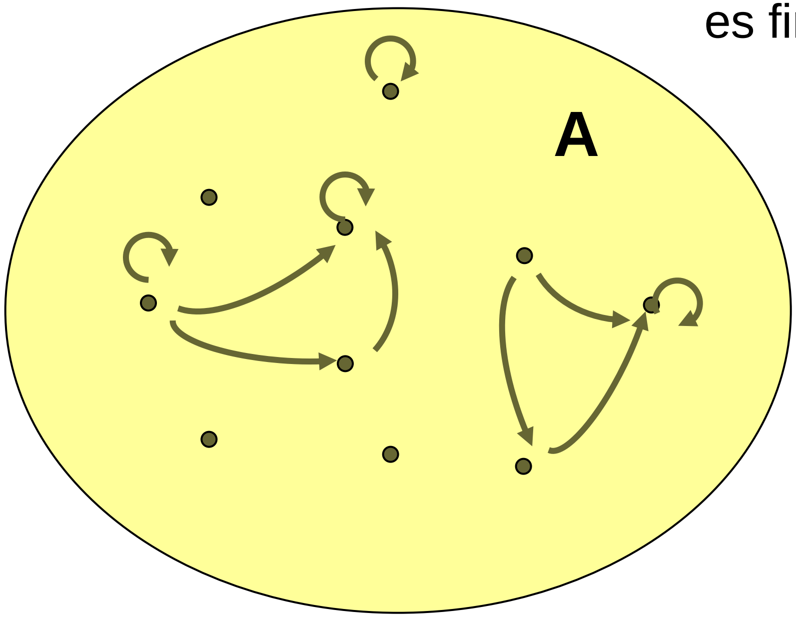
b = an y c = bm. Combinándolas, c = bm = (a.n).m= a(n.m) con n.m $\in$**N** $\Rightarrow$ b R c.

2) En **N** la relación R definida por: "a R b $\Leftrightarrow$ a es el doble de b".
no es transitiva ya que (4, 2) $\in R$ y (2, 1) $\in R$ puesto que 4 es el doble de 2 y 2 es el doble de 1, sin embargo 4 no es el doble de 1, de donde (4,1)$\notin R$

Propiedad Transitiva

Representación Sagital:

La relación *R* es transitiva si cada vez que hay un camino entre tres elementos, también está la flecha que comienza en el principio del camino y va al elemento que es final del camino.



Cuadro Resumen

Completa la siguiente tabla:

Propiedad R	Se satisface sii	No se satisface sii
Reflexiva	$\forall a \in A \;\; a\,R\,a$	
Simétrica	$\forall$ a, b $\in$A: $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$	
Antisimétrica	$\forall$ a, b $\in$A: $[a\,R\,b \wedge b\,R\,a] \Rightarrow a = b$	
Transitiva	$\forall$ a, b, c $\in$A: $[a\,R\,b \wedge b\,R\,c] \Rightarrow a\,\mathrm{R}\,c$	

Cuadro Resumen

Verifique:

Propiedad R	Se satisface sii	No se satisface sii
Reflexiva	$\forall a \in A \;\; a\, R\, a$	$\exists\, a \in A \;\; (a,a) \notin R$
Simétrica	$\forall\, a, b \in A$: $a\, R\, b \Rightarrow b\, R\, a$	$\exists\, a, b \in A$: $(a, b) \in R \wedge (b, a) \notin R$
Antisimétrica	$\forall\, a, b \in A$: $[a\, R\, b \wedge b\, R\, a] \Rightarrow a = b$	$\exists\, a, b \in A$: $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge a \neq b$
Transitiva	$\forall\, a, b, c \in A$: $[a\, R\, b \wedge b\, R\, c] \Rightarrow a\, \mathrm{R}\, c$	$\exists\, a, b, c \in A$: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (a, c) \notin R$

Ejercicio 1:

Sea A = {1, 2, 3, 4}.

i) Representa gráficamente las relaciones (b) y (d) en forma cartesiana y sagital.

ii) Determine las propiedades que satisfacen las siguientes relaciones en A y verifíquelas (demuéstrelas)

a) $R = \{ (1,1) , (2,2) , (3,3)\}$.

b) $R = \{ (1,1) , (2,2) , (3,3), (4,4) , (1,2) , (1,4) , (2,1), (3,2) , (4,3) \}$.

c) $R = \{ (1,1) , (2,2) , (3,3), (4,4)\}$.

d) $R = \{ (1,1) , (2,2) , (3,3), (1,2), (3,2) , (2,3) \}$.

e) $R = \{ (1,1) , (1,2) , (1,4) , (2,3), (4,3) \}$.

Ejercicio 2:

Sea A = {1, 2, 3, 4}. Construya tres relaciones binarias en A con las siguientes propiedades:

i) Reflexiva, simétrica y no transitiva

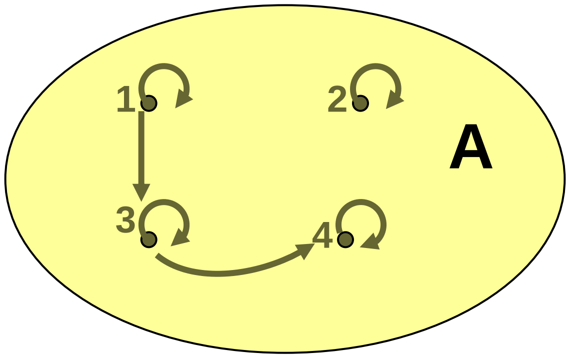
ii) Reflexiva, no simétrica y transitiva

iii) No reflexiva, simétrica y transitiva

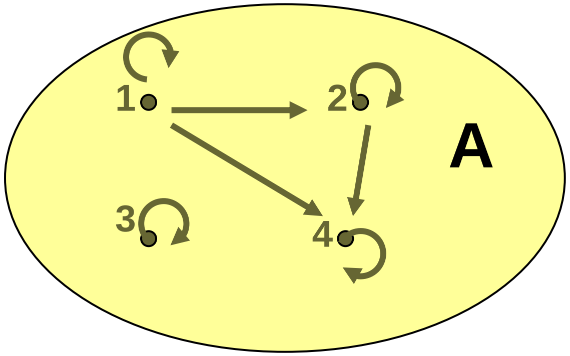
Ejercicio 3:

Sea A = {1, 2, 3, 4}. Considere las siguientes relaciones binarias en A:

(a)



(b)



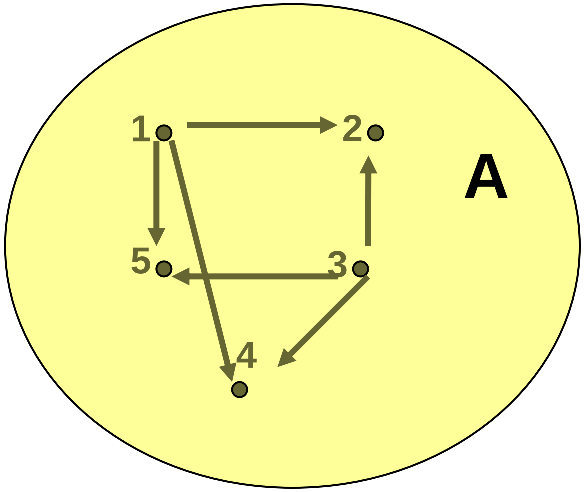
a) Exprese las relaciones anteriores por extensión

b) Determine las propiedades que satisfacen las relaciones en A anteriores y pruébelas!

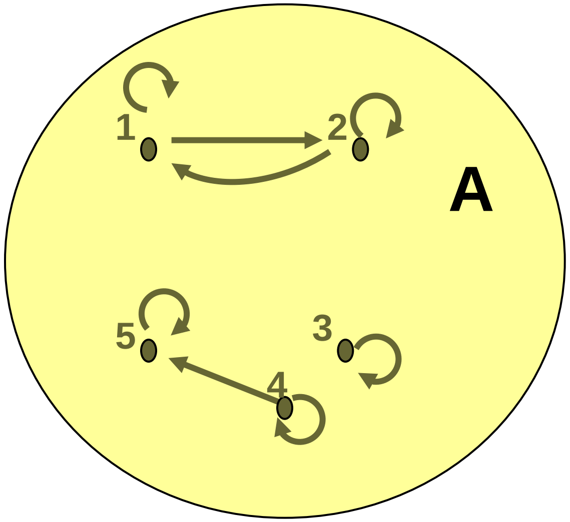
Ejercicio 4:

Sea A = {1, 2, 3, 4, 5}. Considere las siguientes relaciones binarias en A:

(c)



(d)



i) Determine las propiedades que satisfacen las relaciones en A anteriores y pruébelas!

Ejercicio 5:

Definimos en $\Re$, el conjunto de los números reales, la relación *R* :

$$\mathbf{x}\ R\ \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in Z$$

Determina las propiedades que cumple *R* y demuestra, usando la definición, que efectivamente las verifica!

Relaciones reflexivas

Contemos la cantidad de relaciones reflexivas en A, con $|A|=n$

Tenemos n pares de la forma (a_i,a_i); como $|AxA|=n^2$, nos quedan n^2-n pares con componentes distintas. Tenemos la opción de incluirlos o no......por lo tanto hay

$\mathbf{2^{n^2-n}}$ **relaciones reflexivas en A**

Relaciones simétricas

Tenemos $\frac{n^2-n}{2}$ subconjuntos de la forma $\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\}, j \neq i, a_i, a_j \in A$

y n subconjuntos de la forma $\{(a_i,a_i)\}, a_i \in A$

Tenemos la opción de incluirlos o no......por lo tanto hay

$\mathbf{2^n 2^{\frac{n^2-n}{2}}}$ **relaciones simétricas en A y....**

$\mathbf{2^{\frac{n^2-n}{2}}}$ **relaciones reflexivas y simétricas en A.**

Relaciones antisimétricas

Tenemos $\frac{n^2 - n}{2}$ subconjuntos de la forma $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i), j \neq i, a_i, a_j \in A\}$

y n subconjuntos de la forma $\{(a_i, a_i), a_i \in A\}$

Tenemos la opción de incluirlos o no cada par de la forma (a_i,a_i) y con respecto a los pares (a_i,a_j), tenemos tres opciones:

(1) incluir (a_i,a_j) (2) Incluir (a_j,a_i) y (3) no incluir niguno de los dos.

Por lo tanto, hay

$$2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$ **relaciones antisimétricas en A.**

Relación de equivalencia

Diremos que una relación binaria sobre A, es una **relación de equivalencia** si satisface las tres propiedades:

- *R* es reflexiva
- *R* es simétrica
- *R* es transitiva

Ejemplos:

1) En **Z** la relación *R* definida por: a *R* b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 3.

2) Dado un conjunto D$\subseteq$ *U*, la relación:

$$A \, R \, B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap D = B \cap D$$

Demuestra que estas son relaciones de equivalencia

Relación de orden

Diremos que una relación binaria sobre A, es una **relación de orden parcial** si satisface las tres propiedades:

- *R* es reflexiva
- *R* es antisimétrica
- *R* es transitiva

En este caso diremos que el conjunto A está **parcialmente ordenado**

Ejemplos:

1) En D_{60} , el conjunto de todos los divisores de 60, la relación *R* definida por: a *R* b $\Leftrightarrow$ a divide a b.

2) En *R*, la relación definida por a *R* b $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b.

Demuestra que estas son relaciones de orden.

Relación de orden

Diremos que una relación binaria *R* sobre A, es una **relación de orden total** si es una relación de orden parcial y además se satisface que:

$$\forall\ a, b \in A:\ [a\ R\ b \vee b\ R\ a]$$

En este caso diremos que el conjunto A está **totalmente ordenado**

Ejercicio:

1) En las relaciones anteriores decida cuáles son de orden parcial o de orden total

2) Para pensar: Considere la relación en $\mathbf{R}^2$, definida por por:

$$(x,y)\ R\ (a,b) \Leftrightarrow \quad x \leq a\ \wedge y \leq b\ .$$

¿Qué tipo de relación es?